Theoretische Physik I (Mechanik)

WS08/09 Dozent: J. König Übung: M. Governale, A. Hucht

Name	
Matr.Nr	

Aufgabe	1	2	3	4	5	$\sum$
Punkte						

Nachklausur am 18.03.09

Aufgabe 1 : Punktmasse auf Oberfläche *(7 Punkte)*

Eine Punktmasse m gleitet reibungsfrei auf der Oberfläche $z = 2\sqrt{\rho\lambda}$, wobei $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$. Auf die Punktmasse wirkt die Schwerkraft $-mg\hat{\mathbf{e}}_z$. Benutzen Sie Zylinderkoordinaten $\rho,\ \phi,\ z$.

(a) Bestimmen Sie die Lagrangefunktion $L(\rho, \dot{\rho}, \phi, \dot{\phi})$.

(b) Geben Sie die zyklischen Koordinaten und die zugehörigen kanonischen Impulse an.

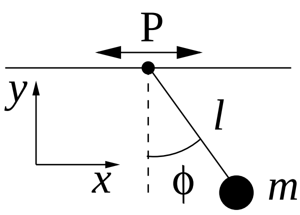
(c) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung für $\rho(t)$ in Abhängigkeit der konstanten kanonischen Impulse.

(d) Zeigen Sie, dass sich die Punktmasse auf einer Kreisbahn bewegen kann und bestimmen Sie den zugehörigen Radius ρ^*.

(e) Für kleine Abweichungen $a(t) = \rho(t) - \rho^*$ oszilliert $\rho(t)$ harmonisch um ρ^*. Bestimmen Sie die Oszillationsfrequenz.

Aufgabe 2 : Ebenes Pendel mit oszillierendem Aufhängepunkt *(5 Punkte)*

Der Aufhängepunkt P eines ebenen Pendels der Länge l und der Masse m oszilliert harmonisch entlang der x-Achse, d.h. $(x_\mathrm{P}, y_\mathrm{P}) = (d \sin\gamma t, 0)$. Auf das Pendel wirkt die Schwerkraft $-mg\hat{\mathbf{e}}_y$.



(a) Bestimmen Sie die Lagrangefunktion $L(\phi, \dot{\phi}, t)$.

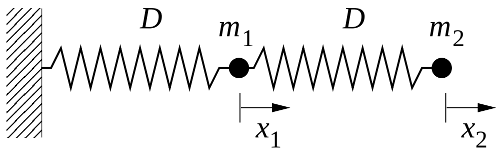
(b) Bestimmen Sie den kanonischen Impuls p_ϕ.

(c) Bestimmen Sie die Hamiltonfunktion $H(\phi, p_\phi, t)$.

(d) Bestimmen Sie die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen.

Aufgabe 3 : Gekoppelte Oszillatoren *(5 Punkte)*

Die Abbildung zeigt zwei gekoppelte Oszillatoren der Massen $m_1 = 2m$ und $m_2 = m$. Wählen Sie als unabhängige Koordinaten die Auslenkungen x_1 und x_2 um die Gleichgewichtslage der Oszillatoren.



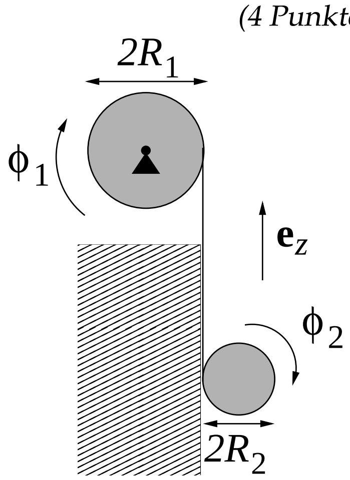
(a) Bestimmen Sie die Lagrangefunktion $L(x_1, \dot{x}_1, x_2, x_2)$.

(b) Schreiben Sie die Lagrangefunktion in der Form $L = \sum_{i,j} [T_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j - V_{ij}x_ix_j]$, und bestimmen Sie T_{ij} und V_{ij}.

(c) Bestimmen Sie die Eigenfrequenzen und die Fundamentalschwingungen.

Aufgabe 4 : Abrollende Zylinder *(4 Punkte)*

Zwei homogene Zylinder der Massen $m_1 = 4m$ und $m_2 = m$ und Radien $R_1 = 2a$ und $R_2 = a$ sind mit einem undehnbaren Faden umwickelt. Die Achse des Zylinders 1 ist reibungsfrei gelagert. Zylinder 2 fällt im Schwerefeld der Erde reibungsfrei entlang einer Wand.



(a) Bestimmen Sie die Lagrangefunktion $L(\phi_1, \dot{\phi}_1, \phi_2, \dot{\phi}_2)$.

(b) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen.

(c) Lösen Sie die Bewegungsgleichungen.

Computer Aufgabe : Lineare Kette *(3 Punkte)*

Eine lineare Kette n gekoppelter Oszillatoren habe die Bewegungsgleichung in Matrix-Vektor-Schreibweise $\ddot{\boldsymbol{x}} = -\boldsymbol{\mathcal{K}} \cdot \boldsymbol{x}$ mit Kopplungsmatrix

$$\mathcal{K} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Welche Randbedingungen hat dieses System?

(b) Wie groß ist die Anzahl der Oszillatoren n und die Anzahl der Federn f?

(c) Der Vektor $\boldsymbol{e} = \{1, 1, 0, -1\}$ ist Eigenvektor der Matrix $\mathcal{K}$. Wie lautet der zugehörige Eigenwert λ? Ist dies die Grundschwingung (d.h. die Mode geringster Energie) des Systems? (Ohne Rechnung begründen)