Theoretische Physik I (Mechanik)

WS08/09   Dozent: J. König   Übung: M. Governale, A. Hucht

Name	
Matr.Nr	

Aufgabe	1	2	3	4	5	$\sum$
Punkte						

Klausur am 06.02.09

Aufgabe 1 : Punktmasse auf Kreiskegel *(7 Punkte)*

Eine Punktmasse m gleitet reibungsfrei auf der Oberfläche $z = \alpha\rho$, wobei $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$. Auf die Punktmasse wirkt die Schwerkraft $-mg\hat{\mathbf{e}}_z$. Benutzen Sie Zylinderkoordinaten $\rho,\ \phi,\ z$.

(a) Bestimmen Sie die Lagrangefunktion $L(\rho, \dot{\rho}, \phi, \dot{\phi})$.

(b) Geben Sie die zyklischen Koordinaten und die zugehörigen kanonischen Impulse an.

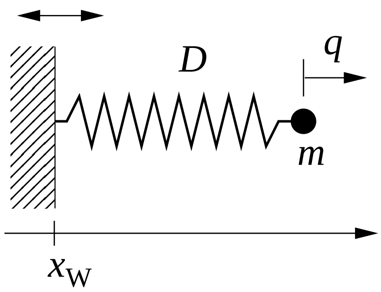
(c) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung für $\rho(t)$ in Abhängigkeit der konstanten kanonischen Impulse.

(d) Zeigen Sie, dass sich die Punktmasse auf einer Kreisbahn bewegen kann und bestimmen Sie den zugehörigen Radius ρ^*.

(e) Für kleine Abweichungen $a(t) = \rho(t) - \rho^*$ oszilliert $\rho(t)$ harmonisch um ρ^*. Bestimmen Sie die Oszillationsfrequenz.

Aufgabe 2 : Getriebener Oszillator *(4 Punkte)*

Eine Punktmasse m ist über eine Feder mit der Federkonstanten D mit einer Wand verbunden. Die Wand oszilliert mit $x_\mathrm{W}(t) = d\sin(\gamma t)$. Der Abstand der Punktmasse zur Wand ist $l + q(t)$, wobei l die Gleichgewichtslänge der Feder ist.



(a) Bestimmen Sie die Lagrangefunktion $L(q, \dot{q}, t)$.

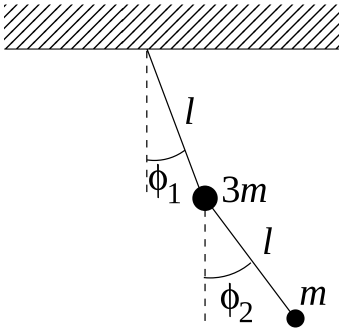
(b) Bestimmen Sie den kanonischen Impuls p.

(c) Bestimmen Sie die Hamiltonfunktion $H(q, p, t)$.

(d) Bestimmen Sie die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen.

Aufgabe 3 : Doppelpendel *(6 Punkte)*

Ein Doppelpendel besteht aus zwei Pendeln der Massen $3m$ und m und der gleichen Länge l (siehe Abbildung). Auf die zwei Punktmassen wirkt die Schwerkraft.



(a) Bestimmen Sie die Lagrangefunktion $L(\phi_1, \dot{\phi}_1, \phi_2, \dot{\phi}_2)$.

(b) Entwickeln Sie die Lagrangefunktion für kleine Winkel ϕ_1 und ϕ_2 bis zur zweiten Ordnung.

(c) Schreiben Sie die Lagrangefunktion in der Form $L = \sum_{i,j} \left[T_{ij} \dot{\phi}_i \dot{\phi}_j - V_{ij} \phi_i \phi_j \right]$, und bestimmen Sie T_{ij} und V_{ij}.

(d) Bestimmen Sie die Eigenfrequenzen und die Fundamentalschwingungen.

Aufgabe 4 : Kanonische Transformationen *(4 Punkte)*

Gegeben seien die Hamilton-Funktion eines Systems

$$H = p \left(2q^2 + \frac{\omega^2}{2} \right)$$

und die kanonische Transformation

$$Q = \sqrt{p}, \quad P = -2q\sqrt{p} \quad \text{mit } p \geq 0.$$

(a) Überprüfen Sie, ob die Transformation kanonisch ist.

(b) Bestimmen Sie die neue Hamilton-Funktion $K(Q, P)$.

(c) Geben Sie die allgemeine Lösung für $Q(t)$ und $P(t)$ an.

(d) Berechnen Sie $q(t)$ und $p(t)$ für die Anfangsbedingung $q(0) = 0$ und $p(0) = p_0$.

Computer Aufgabe : Lineare Kette *(3 Punkte)*

Eine lineare Kette n gekoppelter Oszillatoren habe die Bewegungsgleichung in Matrix-Vektor-Schreibweise $\ddot{\boldsymbol{x}} = -\boldsymbol{\mathcal{K}} \cdot \boldsymbol{x}$ mit Kopplungsmatrix

$$\boldsymbol{\mathcal{K}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Welche Randbedingungen hat dieses System?

(b) Wie groß ist hier die Anzahl der Oszillatoren n und die Anzahl der Federn f?

(c) Der Vektor $\mathbf{e}_0 = \{1, 1, \ldots, 1\}$ ist Eigenvektor der Matrix $\boldsymbol{\mathcal{K}}$. Wie lautet der zugehörige Eigenwert λ_0 und welche physikalische Bedeutung haben $\mathbf{e}_0$ und λ_0?